INTRODUZIONE

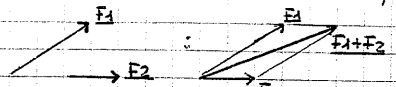
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- massa inerziale ≠ massa gravitazionale
- meccanica classica: spazio e tempo sono indipendenti
- spazio euclideo: distanza tramite teorema di Pitagora
- vettori: P-O = vettore che va da O a P : modulo $\overline{OP}$ (intensità), direzione, verso



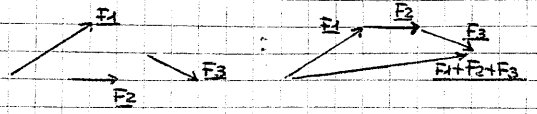
velocità costante = costante in modulo, direzione e verso

Somma:

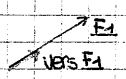


⚠ sposto i punti di applicazione

vettori applicati ≠ vettori liberi



- versore:



$\text{vers } F_1 = \frac{F_1}{|F_1|}$ $\quad |\text{vers } F_1| = \left|\frac{F_1}{|F_1|}\right| = \frac{|F_1|}{|F_1|} = 1 \Rightarrow$ modulo = 1

adimensionale: $[M^0\,L^0\,T^0]$ es: $[F] = [MLT^{-2}]$

- prodotto scalare: $\underline{a}\cdot\underline{b} \in \mathbb{R}$ $\quad \boxed{\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos(\hat{\underline{a},\underline{b}})}$

$\underline{a}\cdot\underline{a} = |\underline{a}^2| \Rightarrow |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}}$

$\begin{cases}\underline{a}\cdot\underline{b}=0\\ \underline{a}\neq 0\\ \underline{b}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \underline{a}\perp\underline{b}$ $\qquad \underline{a}\cdot\underline{b}=0 \Leftrightarrow \underline{a}\perp\underline{b}$

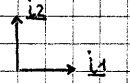
Qualsiasi vettore del piano può essere espresso come combinazione lineare di altri due: $\underline{c} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{b}$; $\underline{a}$ e $\underline{b}$ è una base.

proprietà distributiva: $(\lambda\underline{a} + \mu\underline{b})\cdot\underline{c} = \lambda\underline{a}\cdot\underline{c} + \mu\underline{b}\cdot\underline{c}$

proprietà commutativa: $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$

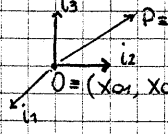
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Ora prendo una base ortonormale:



$\underline{v} = \lambda_1\underline{i}_1 + \lambda_2\underline{i}_2 \sim \underline{v} = v_1\underline{i}_1 + v_2\underline{i}_2$

$\underline{v}\cdot\underline{i}_1 = (v_1\underline{i}_1 + v_2\underline{i}_2)\underline{i}_1 = v_1\underbrace{\underline{i}_1\cdot\underline{i}_1}_{1} + v_2\underbrace{\underline{i}_1\cdot\underline{i}_2}_{0} = v_1$ $\qquad \underline{v}\cdot\underline{i}_n = v_n$: proiezione sull'asse



$P-O = (x_1 - x_{O1})\underline{i}_1 + (x_2 - x_{O2})\underline{i}_2 + (x_3 - x_{O3})\underline{i}_3$ → le pongo = 0

$= x_1\underline{i}_1 + x_2\underline{i}_2 + x_3\underline{i}_3$

$\underline{a}\cdot\underline{b} = (a_1\underline{i}_1 + a_2\underline{i}_2 + a_3\underline{i}_3)\cdot(b_1\underline{i}_1 + b_2\underline{i}_2 + b_3\underline{i}_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ $\quad (\underline{i}_1\cdot\underline{i}_1 = 1,\ \underline{i}_1\cdot\underline{i}_2 = 0)$

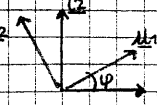
$\underline{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

non dipende dalla scelta delle coordinate

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2 + \bar{a}_3^2$ (la barra indica un'altra terna)

- ruotare una terna:

-2D:



$\underline{v} = v_1\underline{i}_1 + v_2\underline{i}_2 = \bar{v}_1\underline{u}_1 = \bar{v}_2\underline{u}_2$

$\underline{u}_1 = (\underline{u}_1\cdot\underline{i}_1)\underline{i}_1 + (\underline{u}_1\cdot\underline{i}_2)\underline{i}_2$ ← $\underline{u}_1 = \alpha_1\underline{i}_1 + \alpha_2\underline{i}_2$; $\underline{u}_1\cdot\underline{i}_1 = \alpha_1$

$\underline{u}_2 = (\underline{u}_2\cdot\underline{i}_1)\underline{i}_1 + (\underline{u}_2\cdot\underline{i}_2)\underline{i}_2$

$\underline{v} = \bar{v}_1\left[(\underline{u}_1\cdot\underline{i}_1)\underline{i}_1 + (\underline{u}_1\cdot\underline{i}_2)\underline{i}_2\right] + \bar{v}_2\left[(\underline{u}_2\cdot\underline{i}_1)\underline{i}_1 + (\underline{u}_2\cdot\underline{i}_2)\underline{i}_2\right]$

$= \underbrace{\left[\bar{v}_1\cdot(\underline{u}_1\cdot\underline{i}_1) + \bar{v}_2(\underline{u}_2\cdot\underline{i}_1)\right]}_{v_1}\underline{i}_1 + \underbrace{\left[v_1(\underline{u}_1\cdot\underline{i}_2) + v_2(\underline{u}_2\cdot\underline{i}_2)\right]}_{v_2}\underline{i}_2$

$\underline{u}_1 \cdot \underline{i}_1 = 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$ $\quad$ $\underline{u}_2 \underline{i}_1 = -\text{sen}\varphi$

$\underline{u}_1 \underline{i}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(90-\varphi) = \text{sen}\varphi$ $\quad$ $\underline{u}_2 \underline{i}_2 = \cos\varphi$

$$\begin{cases} v_1 = \bar{v}_1 \cos\varphi + \bar{v}_2 \,\text{sen}\varphi \\ v_2 = \bar{v}_1 (-\text{sen}\varphi) + \bar{v}_2 \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\varphi \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\varphi \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

↓ matrice inversa

= matrice trasposta perchè det = 1

- 3D: $\begin{pmatrix} \underline{u}_1 \underline{i}_1 & \underline{u}_1 \underline{i}_2 & \underline{u}_1 \underline{i}_3 \\ \underline{u}_2 \underline{i}_1 & \underline{u}_2 \underline{i}_2 & \underline{u}_2 \underline{i}_3 \\ \underline{u}_3 \underline{i}_1 & \underline{u}_3 \underline{i}_2 & \underline{u}_3 \underline{i}_3 \end{pmatrix}$ $\quad$ rotazione piana: $\underline{u}_3 = \underline{i}_3$ $\quad \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \underline{i}_1 & \underline{u}_1 \underline{i}_2 & 0 \\ \underline{u}_2 \underline{i}_1 & \underline{u}_2 \underline{i}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quanti angoli mi servono?

2D: • $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0$ $\quad$ 4 numeri, 3 relazioni, 1 parametro
• $\underline{u}_1^2 = 1$
• $\underline{u}_2^2 = 1$

3D: • $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0$ • $\underline{u}_1^2 = 1$ $\quad$ 9 numeri, 6 relazioni, 3 parametri
• $\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_3 = 0$ • $\underline{u}_2^2 = 1$
• $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_3 = 0$ • $\underline{u}_3^2 = 1$

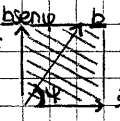
Scelgo gli angoli di Eulero: 1) ruoto intorno a $\underline{i}_3$ (precessione)
2) ruoto $\underline{i}_3$: trovo $\underline{u}_3$ (nutazione)
3) ruoto intorno a $\underline{u}_3$ (rotazione propria)

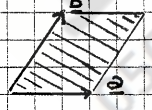
- Prodotto vettoriale: $\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{c}$ $\quad$ $\boxed{|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \text{sen}(\hat{\underline{a},\underline{b}})}$
- $\underline{c} \perp \underline{a}$ e $\underline{c} \perp \underline{b}$
- regola mano destra: il primo va sul secondo seguendo l'angolo minore, il pollice indica il verso.

$$\begin{cases} \underline{a} \wedge \underline{b} = 0 \\ \underline{a} \neq 0 \\ \underline{b} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{a} \parallel \underline{b} \qquad \underline{a} \wedge \underline{b} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$$

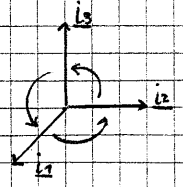
proprietà anticommutativa: $\underline{a} \wedge \underline{b} = -\underline{b} \wedge \underline{a}$

$|\underline{c}|$ è l'area:





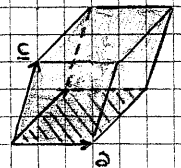
Ora scelgo un sistema di assi ortonormale e orientato



$\underline{i}_1 \cdot \underline{i}_2 = \underline{i}_3$
$\underline{i}_2 \cdot \underline{i}_3 = \underline{i}_1$
$\underline{i}_3 \cdot \underline{i}_1 = \underline{i}_2$

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \det \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- Prodotto misto: $\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c}$ $\quad$ non c'è ambiguità: $\underline{a} \wedge (\underline{b} \cdot \underline{c})$ non ha senso; $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot \underline{c}$ sì



è l'area del parallelepipedo

- $\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = 0$: complanare
- $\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{a} = 0$, $\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{b} = 0$
- $\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = \det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
- $\boxed{\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{b} \wedge \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c}}$ (ho scambiato per due volte due righe)

- Doppio prodotto vettoriale : $(\underline{a}\wedge\underline{b})\wedge\underline{c}$

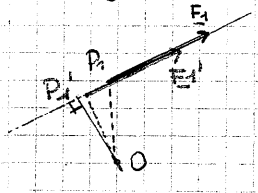
$$(\underline{a}\wedge\underline{b})\wedge\underline{c} = -(\underline{b}\cdot\underline{c})\underline{a}+(\underline{a}\cdot\underline{c})\cdot\underline{b}$$

$\perp\underline{a}$ e $\perp\underline{b}$

torno sul piano di $\underline{a}$ e $\underline{b}$: lo esprimo come combinazione lineare di $\underline{a}$ e $\underline{b}$

VETTORI APPLICATI

Momento rispetto a un polo



$\underline{M}(O)=(P_1-O)\wedge\underline{F}_1$ $\quad M(O)=\overline{P_1O}\cdot|\underline{F}_1|\cdot\text{sen}\,\alpha$

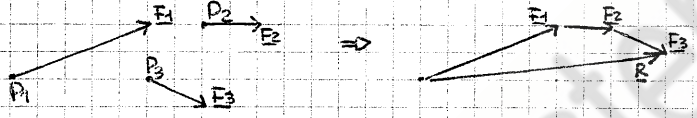
$\underline{M}(O')=(P_1'-O)\wedge\underline{F}_1'$ $\quad M(O)=\overline{P_1'O}\cdot|\underline{F}_1|\cdot\text{sen}\,\alpha'$

b : braccio $\quad M(O)=|\underline{F}_1|\cdot b$

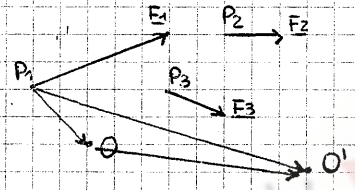
↳ se traslo F lungo la sua retta di azione $M(O)$ non cambia

Sistemi di vettori

- Risultante $\quad R=\Sigma F_i$



- Momento $\quad M_{tot}=\Sigma M_i$ tutti rispetto allo stesso polo



$$\boxed{\underline{M}(O)=(P_1-O)\wedge|\underline{F}_1|+(P_2-O)\wedge|\underline{F}_2|+(P_3-O)\wedge|\underline{F}_3|}$$

$$\underline{M}(O')=(P_1-O')\wedge|\underline{F}_1|+(P_2-O')\wedge|\underline{F}_2|+(P_3-O')\wedge|\underline{F}_3|$$

voglio trovare il legame tra $M(O)$ e $M(O')$:

$$(P_1-O')=(P_1-O)+(O-O')$$

$$\underline{M}(O')=[(P_1-O)+(O-O')]\wedge|\underline{F}_1|+\dots$$

$$=\underbrace{(P_1-O)\wedge\underline{F}_1|}_{M(O)}+\underbrace{(O-O')\wedge|\underline{F}_1|}_{(O-O')\wedge|\underline{R}|}+\dots \qquad (O-O')=-(O'-O)$$

momento che avrebbe $\underline{R}$ se fosse applicato in O', rispetto ad O.

LEGGE DI VARIAZIONE DEL MOMENTO AL VARIARE DEL POLO: $\boxed{\underline{M}(O')=\underline{M}(O)-(O'-O)\wedge|\underline{R}|}$

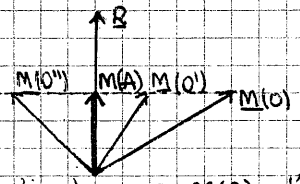
$M(O)=M(O')$ se
- $\underline{R}=0$
- $O\equiv O'$
- $(O'-O)\wedge\underline{R}=0$: $(O'-O)\parallel\underline{R}$

Proprietà del momento

$$\underline{M}(O')=\underline{M}(O)-(O'-O)\wedge\underline{R}$$

$$\underline{M}(O')\cdot\text{vers}\,\underline{R}=\underline{M}(O)\cdot\text{vers}\,\underline{R}-\cancel{(O'-O)\wedge\underline{R}\cdot\text{vers}\,\underline{R}}$$

$\underline{M}$ proiettato su $\underline{R}$ ↳ prodotto misto: se i vettori sono complanari fa 0



$\underline{M}_{\parallel\underline{R}}$ non cambia
$\underline{M}_{\perp\underline{R}}$ cambia
} se cambio polo.

⚠ solo in 3D posso avere $\underline{M}\parallel\underline{R}$; in 2D $\underline{M}$ è $\perp$ al piano delle $\underline{F}$, mentre $\underline{R}\in$ al piano.

Voglio trovare $\underline{M}(A)$: l'$\underline{M}$ che ha modulo minore e quello $\parallel\underline{R}$:

$$\underline{M}(A)=\underline{M}(O)-(A-O)\wedge\underline{R}$$

voglio che: $\underline{M}(A)\wedge\underline{R}=[\underline{M}(O)-(A-O)\wedge\underline{R}]\wedge\underline{R}=0$

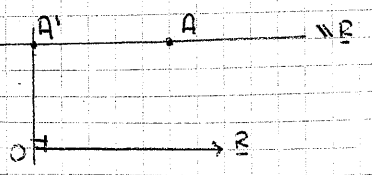
$$\underline{M}(O)\wedge\underline{R}-[(A-O)\wedge\underline{R}]\wedge\underline{R}=0$$

$$[(A-O)\wedge\underline{R}]\wedge\underline{R}=\underline{M}(O)\wedge\underline{R}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$(\underline{a}\wedge\underline{b})\wedge\underline{c} = (\underline{b}\cdot\underline{c})\cdot\underline{a} - (\underline{a}\cdot\underline{c})\cdot\underline{b}$

$(\underline{R}\cdot\underline{R})\cdot(A-O) - [(A-O)\cdot\underline{R}]\,\underline{R} = \underline{M}(O)\wedge\underline{R}$



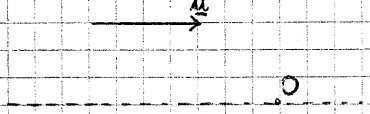
Mi accorgo che mi sarebbe convenuto prendere A' : posso prenderlo adesso perché $\overline{AA'} \parallel \underline{R}$

$R^2\cdot(A'-O) - [(A'-O)\cdot\underline{R}]\,\underline{R} = \underline{M}(O)\wedge\underline{R}$

$\doteq 0$ $(A'-O)\perp\underline{R}$

$$\boxed{(A'-O) = \frac{\underline{M}(O)\wedge\underline{R}}{R^2}}$$

Esercizio: trovare la retta $\parallel \underline{u}$ passante per O



$O = (1,0,-1)$

$\underline{u} = \frac{\underline{i}_1 - \underline{i}_2 + \underline{i}_3}{\sqrt{3}}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+t \end{cases}$ $\begin{cases} t = x-1 \\ t = -y \\ t = z+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1 = -y \\ x-1 = z+1 \\ -y = z+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-1 = 0 \\ x-z-2 = 0 \\ y+z+1 = 0 \end{cases}$ ← basta scegliere 2 di questi 3 piani

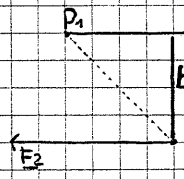
---

Esiste una retta rispetto alla quale la componente trasversale di $\underline{M}$ rispetto a $\underline{R}$ è nulla. ⇒ **ASSE CENTRALE**

Se $\underline{R}=0$ non ha senso cercare l'asse centrale

Def: $\underline{M}(O)\cdot\underline{u}$ = momento assiale

- Coppia di forze : $F_1 = -F_2$

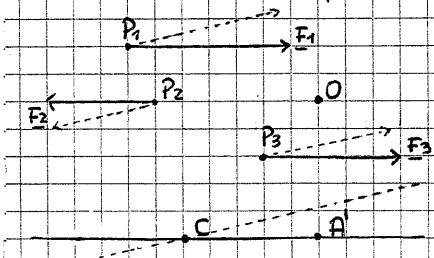


- $\underline{R} = 0$
- $\underline{M}(P_2) = (P_1 - P_2)\wedge\underline{F}_1$ $\quad M(P_2) = F_1\cdot b$

Ogni coppia è caratterizzata da un momento

- ∄ asse centrale

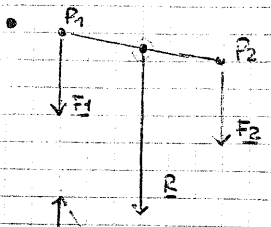
- Sistema di vettori paralleli



- $\underline{R} = \sum_n \underline{F}_n$ tenendo conto del segno $= \sum_n F_n\,\underline{u}$ $\qquad \underline{F}_n = \underbrace{(\underline{F}_n\cdot\underline{u})}_{F_n}\cdot\underline{u}$
- $\underline{M}(O) = \sum_n (P_n-O)\wedge\underline{F}_n = \sum_n (P_n-O)\wedge F_n\,\underline{u}$
- asse centrale : $(A'-O) = \frac{\underline{M}(O)\wedge\underline{R}}{R^2}$
- **CENTRO DEI VETTORI PARALLELI** $\quad \boxed{(C-O) = \frac{\sum_n (P_n-O)\cdot|F_n|}{R}}$

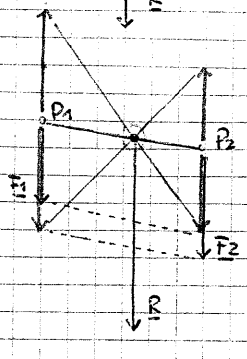
Esempio: la forza peso è applicata in tutti i punti di un corpo, ho perciò un sistema di vettori paralleli ⇒ il centro dei vettori paralleli si trova nel centro di massa.

Trovare l'asse centrale:

- 

$\underline{F_1} = \underline{F_2} = \underline{F}$

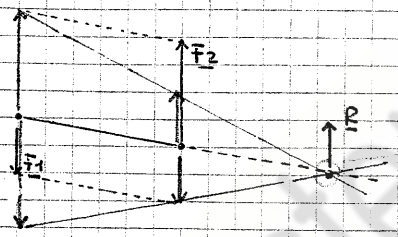
$\underline{R} = 2\underline{F}$: applicata nel punto medio di P_1 e P_2

- 

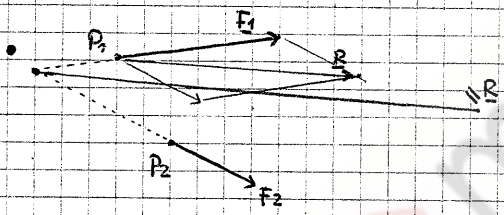
$\underline{F_1} \neq \underline{F_2}$

$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$: applicata non nel punto medio, ma più vicino ad $\underline{F_2}$

costruzione geometrica



centro dei vettori paralleli

- 

vettori complanari

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Sistemi equivalenti

Due sistemi di vettori si dicono equivalenti se hanno stessa $\underline{R}$ e stesso $\underline{M}$

(se $M(o)$ è uguale $\Rightarrow$ $M(o')$ è uguale $\forall o'$)

Azioni per cui il sistema di vettori non cambia:

- sposto i vettori lungo la loro retta di azione
- aggiungo o sottraggo una coppia di braccio nullo
- sostituzione di più vettori applicati in uno stesso punto con la loro risultante sempre applicata nello stesso punto
- decomposizione di un vettore applicato in un punto in più vettori applicati nello stesso punto (la cui risultante è il vettore di partenza)

$\Rightarrow$ posso sostituire ogni sistema con soli 3 vettori

- $\underline{R}$ applicato sull'asse centrale
- una coppia di vettori il cui momento è $\underline{M}$

} ⚠ lo posso fare solo se il corpo è rigido.